Aminetou Sidi Med Abdy | Faitma cherif Ahmed.
Aichetou Bouhamadi
Mbarka Med Lemin Zamel

Exercice 18

On considère la fonction numérique de variable réelle x définie par $f(x)=\sqrt{\frac{x}{1-x}}$. Soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$.

Partie A

1) Etudier les variations de f et tracer (C).
2) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} dont on donnera l'expression. Tracer (C') la courbe de f^{-1} dans le même repère.
3) Soit A l'aire du domaine plan limité par (C) et les droites d'équations $x=0$, $y=1$.

Prouver que $A=\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}dx$.

Partie B

La fonction φ est une fonction continue sur IR. On définit la fonction F sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ par $F(x)=\int_0^{\tan x}\frac{\varphi(t)}{1+t^2}dt$.

1) Prouver que F est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ et que $F'(x)=\varphi(\tan x)$.
2) Déterminer F(x) dans les cas suivants: a) $\varphi(t)=1$; b) $\varphi(t)=t^2$.
3) En déduire les valeurs de $I=\int_0^1\frac{1}{1+t^2}dt$ et $J=\int_0^1\frac{t^2}{1+t^2}dt$.

Partie C

On définit une suite réelle (U_n) par $U_0=\int_0^1\frac{dt}{1+t^2}$, et pour tout entier naturel $n\in IN^*$ par : $U_n=\int_0^1\frac{t^{2n}}{1+t^2}dt$.

1) Montrer que: $\forall n\in IN$, $0\le U_n\le\frac{1}{2n+1}$. En déduire $\lim\limits_{n\to\infty}U_n$.
2) Montrer que: $\forall n\in IN$, $U_{n+1}+U_n=\frac{1}{2n+1}$. En déduire U_2 et U_3.
3) Soit (V_n) la suite définie par: $V_n=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+...+\frac{(-1)^n}{2n+1}$.

Montrer que: $\forall n\in IN$, $|U_{n+1}|=|V_n-U_0|$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty}V_n$.

4) Pour quelles valeurs de n, V_n est une valeur approchée de $\frac{\pi}{4}$ à la précision de 10^{-2} ?

1) $f(x)=\sqrt{\frac{x}{1-x}}$, f est définie ssi:

$$\begin{cases} 1-x\neq 0 \\ \text{et} \\ \frac{x}{1-x}\geq 0. \end{cases}$$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$-x$		$-$	0	$+$		$+$	
x		$+$		$+$	0	$-$	
$\frac{}{-x}$		$-$	0	$+$	$\|\|$	$-$	

$D_f = [0, 1[$.

f est continue sur D_f et dérivable sur $]0,1[$.

Etudions la dérivabilité de f à droite en 0.

$f(0) = 0$

$\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{\frac{x}{1-x}}}{x-0}$ FI $\frac{0}{0}$

$\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{\frac{x}{1-x}}}{x} = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\left(\sqrt{\frac{x}{1-x}}\right)\left(\sqrt{\frac{x}{1-x}}\right)}{x\sqrt{\frac{x}{1-x}}}$

$= \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\frac{x}{1-x}}{x\sqrt{\frac{x}{1-x}}} =$

$\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{x}{x(1-x)^2\sqrt{\frac{x}{1-x}}} =$

$\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{\underbrace{(1-x^2)\sqrt{\frac{x}{1-x}}}_{0^+}} = +\infty$

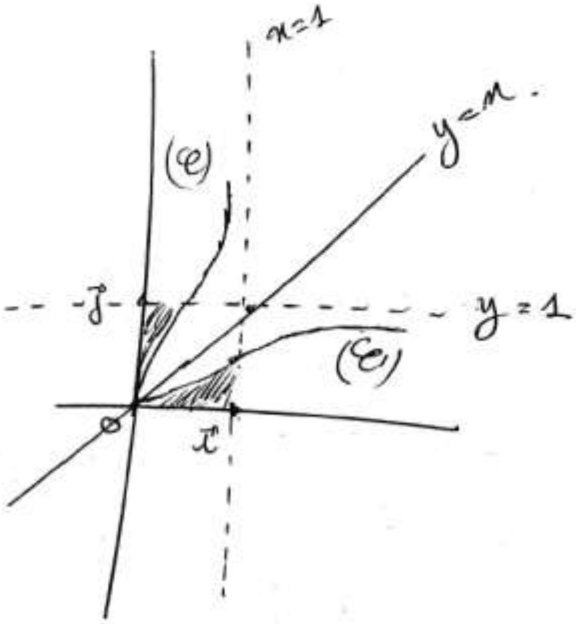
$\Rightarrow \boxed{\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty}$

Donc, f n'est pas dérivable à droite en 0 et $(\mathcal{C})$ admet une demi-tangente verticale dirigée vers le haut à droite du point $(0,0)$.

- $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = f(0) = 0$
- $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} \sqrt{\frac{x}{1-x}} = +\infty$ ($1-x \to 0^+$)
- $x = 1$, A.V à $(\mathcal{C})$.
- $\forall x \in]0,1[$ $f'(x) = \frac{\frac{1-x+x}{(1-x)^2}}{2\sqrt{\frac{x}{1-x}}}$

$= \frac{1}{2(x-1)^2\sqrt{\frac{x}{1-x}}} > 0$.

x	0		1
$f'(x)$	$\|\|$	$+$	$\|\|$
$f(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$



2) Comme f est continue et strictement monotone sur l'intervalle $[0,1[$ elle réalise une bijection de $[0,1[$ sur l'intervalle $J = f([0,1[) = [0,+\infty[$ et elle admet donc une fonction réciproque f^{-1} définie sur $[0,+\infty[$.

$f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow f(y) = x$.

$\Leftrightarrow \sqrt{\dfrac{y}{1-y}} = x$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{y}{1-y} \\ x \geq 0 \end{cases}$

• $\dfrac{y}{1-y} = x^2 \Leftrightarrow y = x^2 - yx^2$

$\Leftrightarrow y + yx^2 = x^2$

$\Leftrightarrow y(1+x^2) = x^2$

$\Leftrightarrow y = \dfrac{x^2}{1+x^2}$

Donc, $\boxed{\forall x \in [0,+\infty[\quad f^{-1}(x) = \dfrac{x^2}{1+x^2}}$.

• La courbe $(\mathscr{C}')$ de f^{-1} est la symétrique de $(\mathscr{C})$ par rapport à la droite d'équation $\boxed{y=x}$.

3) La symétrique par rapport à la droite $y=x$ du domaine D délimité par $(\mathscr{C})$, et les droites d'équation $x=0$ et $y=1$ est le domaine D' délimité par $\mathscr{C}'$ et les droites d'équation $y=0$ et $x=1$.

or : l'aire de D' est :

$$\int_0^1 f^{-1}(x)\,dx = \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}\,dx.$$

et une réflexion conserve les aires.

D'où : l'aire de D est égale à celle de D'

Donc : $\boxed{A = \int_0^1 \dfrac{x^2}{1+x^2}\,dx}$

Partie B :

1) $\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $F(x) = \int_0^{\tan x} \dfrac{\varphi(t)}{1+t^2}\,dt$

Comme les fonctions $u(x) = 0$ et $v(x) = \tan x$ sont dérivables sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et $\tan x$ prend ses valeurs dans $\mathbb{R}$, la fonction F est dérivable comme que la fonction $f(t) = \dfrac{\varphi(t)}{1+t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$, $\Rightarrow$ F est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[$ et $\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

$F'(x) = v'(x) f(v(x)) - u'(x) f(u(x))$

$\Rightarrow F'(x) = (1+\tan^2 x) f(\tan x) - 0 \times f(0)$

$= (1+\tan^2 x) \dfrac{\varphi(\tan x)}{(1+\tan^2 x)} = \varphi(\tan x)$.

2) a) $\varphi(t) = 1$

Donc : $\forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, $F'(x) = \varphi(\tan x)$.

D'où : $\forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ $F'(x) = 1$

Donc : il existe une constante c telle que $\forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

$F(x) = x + c$.

or : $0 \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

d'où d'une part $F(0) = \int_0^{\tan 0} \frac{1}{1+t^2} dt = \int_0^0 \frac{1}{1+t^2} dt = 0$

D'autre part : $F(0) = 0 + c = c$.

Donc : $c = 0$

D'où : $\forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

$F(x) = x$.

b) $\varphi(t) = t^2$

Donc : $\forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

$F'(x) = \varphi(\tan x)$

D'où : $\forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

$F'(x) = \tan^2 x = 1 + \tan^2 x - 1$

Donc, il existe une constante c telle que $\forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

Donc, il existe une constante c telle que $\forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

$F(x) = \tan x - x + c$

or : $0 \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

d'où : d'une part

$F(0) = \int_0^{\tan 0} \frac{t^2}{1+t^2} dt = 0$

et d'autre part $F(0) = \tan(0) - 0 + c = 0 - 0 + c = c$.

D'où : $\boxed{c = 0}$.

Donc : $\forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

$F(x) = \tan x - x$.

3) $I = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt = \int_0^{\tan(\frac{\pi}{4})} \frac{\varphi(t)}{1+t^2} dt$.

où : φ est la fonction définie en (a).

Donc $I = F(\pi/4)$

lorsque : $\varphi(t) = 1$.

or : dans ce cas on a :

$\forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, $F(x) = x$

et $\frac{\pi}{4} \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

D'où : $F(\frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{4}$

Donc : $\boxed{I = \frac{\pi}{4}}$

• $J = \int_0^1 \frac{t^2}{1+t^2}\,dt = \int_0^{\tan(\frac{\pi}{4})} \frac{\varphi(t)}{1+t^2}\,dt$.

où φ est la fonction définie en (b)

Donc : $J = F(\frac{\pi}{4})$.

lorsque $\varphi(t) = t^2$.

or dans ce cas :

$\forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

$F(x) = \tan x - x$

et $\frac{\pi}{4} \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

D'où : $F(\frac{\pi}{4}) = \tan(\frac{\pi}{4}) - \frac{\pi}{4}$

$= 1 - \frac{\pi}{4}$.

Donc : $\boxed{J = 1 - \frac{\pi}{4}}$

Partie. C :

1) $u_n = \int_0^1 \frac{t^{2n}}{1+t^2}\,dt$.

$0 \leq t \leq 1 \Rightarrow 0 \leq t^2 \leq 1$

$\Rightarrow 0 < 1 \leq 1+t^2 \leq 2$

$\Rightarrow 0 < \frac{1}{2} \leq \frac{1}{1+t^2} \leq 1$

$\Rightarrow 0 < \frac{1}{1+t^2} \leq 1$

$\Rightarrow 0 < \frac{1}{1+t^2} \leq 1$

et en multipliant par t^{2n}

$(t^{2n} \geq 0,\ \forall t \in [0,1])$ on obtient : $0 \leq \frac{t^{2n}}{1+t^2} \leq t^{2n}$

D'où : $0 \leq \int_0^1 \frac{t^{2n}}{1+t^2}\,dt \leq \int_0^1 t^{2n}\,dt$

Donc : $0 \leq u_n \leq \left[\frac{t^{2n+1}}{2n+1}\right]_0^1$

D'où : $0 \leq u_n \leq \frac{1}{2n+1} - 0$

Donc : $\forall n \in \mathbb{N}\quad 0 \leq u_n \leq \frac{1}{2n+1}$.

or : $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2n+1} = 0$

D'où : d'après le T.G :

(Théorème de gendarmes)

$\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = 0}$

2) $\forall n \in \mathbb{N}$.

$u_{n+1} + u_n = \int_0^1 \frac{t^{2(n+1)}}{1+t^2}\,dt + \int_0^1 \frac{t^{2n}}{1+t^2}\,dt$

$= \int_0^1 \frac{t^{2n+2} + t^{2n}}{1+t^2}\,dt$.

$= \int_0^1 \frac{t^{2n}(1+t^2)}{1+t^2}\,dt$

$= \int_0^1 t^{2n}\,dt = \left[\frac{t^{2n+1}}{2n+1}\right]_0^1$

$= \frac{1}{2n+1} - 0 = \frac{1}{2n+1}$

Donc :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ U_{n+1} + U_n = \frac{1}{2n+1}.$$

Donc : pour $n = 1$ on a :

$$U_2 + U_1 = \frac{1}{2.1+1}$$

D'où : $U_2 + U_1 = \frac{1}{3}$

Or : $U_1 = \int_0^1 \frac{t^2}{1+t^2}\,dt = J = 1 - \frac{\pi}{4}$

D'où : $U_2 + 1 - \frac{\pi}{4} = \frac{1}{3}$

Donc : $U_2 = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{3}$

Et pour $n = 2$ on a :

$U_3 + U_2 = \frac{1}{5}$

$U_3 + \frac{\pi}{4} - \frac{2}{3}$

Et pour $n = 2$ on a :

$U_3 + U_2 = \frac{1}{5}$

$U_3 + \frac{\pi}{4} - \frac{2}{3} = \frac{1}{5}$

$U_3 = \frac{1}{5} + \frac{2}{3} - \frac{\pi}{4}$

$$\boxed{U_3 = \frac{13}{15} - \frac{\pi}{4}}$$

3) On a : $V_n = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots + \frac{(-1)^n}{2n+1}$

Sad : $V_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}$.

Or : nous avons montrer que en (2) : $\forall k \in \mathbb{N},\ U_{k+1} + U_k = \frac{1}{2k+1}$

D'où : $\forall k \in \mathbb{N}$

$$(-1)^k (U_{k+1} + U_k) = \frac{(-1)^k}{2k+1}.$$

Donc

$(-1)^0 (U_1 + U_0) = \frac{(-1)^0}{1}$

$(-1)^1 (U_2 + U_1) = \frac{(-1)^1}{3}$

$(-1)^2 (U_2 + U_1) = \frac{(-1)^2}{3}$

$(-1)^2 (U_3 + U_2) = \frac{(-1)^2}{5}$

$(-1)^3 (U_4 + U_3) = \frac{(-1)^3}{7}$

$\vdots$

$(-1)^n (U_{n+1} + U_n) = \frac{(-1)^n}{2n+1}.$

Et en addition membre à membre on a :

$U_0 + (-1)^n U_{n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \dots + \frac{(-1)^n}{2n+1}$

Sad : $U_0 + (-1)^n U_{n+1} = V_n$.

Donc : $(-1)^n U_{n+1} = V_n - U_0$

Donc : $\forall n \in \mathbb{N}\ |U_{n+1}| = |V_n - U_0|$.

Or : $\lim_{n \to +\infty} U_{n+1} = 0$

D'où : $\lim_{n \to +\infty} |U_{n+1}| = 0$

D'où $\lim_{n \to +\infty} |V_n - U_0| = 0$

D'où $\lim_{n \to +\infty} V_n = U_0$

$= \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,dt = I = \frac{\pi}{4}$

$\lim_{n \to +\infty} V_n = \frac{\pi}{4}$

4) on a : donc $\forall n \in \mathbb{N}$

$|u_{n+1}| = |u_n - \frac{\pi}{4}|$

Pour que v_n soit une valeur approchée de $\frac{\pi}{4}$ à 10^{-2} près il suffit que :

$|v_n - \frac{\pi}{4}| < 10^{-2}$

çad : $|u_{n+1}| < 10^{-2}$

or : de © ① on a :

$\forall k \in \mathbb{N} \quad 0 \leq u_k \leq \frac{1}{2k+1}$

D'où pour $k = n+1$ on a :

$0 \leq u_{n+1} \leq \frac{1}{2n+2}$

on doit avoir : $\frac{1}{2n+3} < 10^{-2}$

çad : $2n+3 > 10^{2}$

çad $2n+1 > 100$

çad $2n > 100-3$

çad $n > \frac{97}{2} = 48,5$.

Il suffit donc de prendre $\boxed{n = 49}$.

http://maurimath.net/Espaceeleves.php

Aminetou SiDi Med Abdy
Aichetou Bouhamadi
Mbarka Med lemin Zamel
Fatma cherif Ahmed

Exercice 16

Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ en utilisant la fonction donnée f dans chacun des cas suivants:

1) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$; $S_n=\dfrac{1}{n}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2+\frac{1}{n}}}+\dfrac{1}{\sqrt{2+\frac{2}{n}}}+\dots+\dfrac{1}{\sqrt{2+\frac{n-1}{n}}}\right)$

2) $f(x)=\dfrac{1}{(x+1)^2}$; $S_n=n\left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{1}{(n+1)^2}+\dfrac{1}{(n+2)^2}+\dots+\dfrac{1}{(2n-1)^2}\right)$

3) $f(x)=\cos^2 x$; $S_n=\dfrac{\pi}{n}\left(1+\cos^2\dfrac{\pi}{n}+\cos^2\dfrac{2\pi}{n}+\dots+\cos^2\dfrac{(n-1)\pi}{n}\right)$

Exercice Resolu : 16

1) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$; $S_n=\dfrac{1}{n}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2+\frac{1}{n}}}+\dfrac{1}{\sqrt{2+\frac{2}{n}}}+\dots+\dfrac{1}{\sqrt{2+\frac{n-1}{n}}}\right)$

$$=\frac{2-1}{n}\left(f(1)+f\left(1+\frac{1}{n}\right)+f\left(1+\frac{2}{n}\right)+\dots+f\left(1+\frac{n-1}{n}\right)\right).$$

$$S_n=\frac{2-1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(1+\frac{k(2-1)}{n}\right).$$

$$\lim_{n\to+\infty} S_n=\int_1^2\frac{1}{\sqrt{x+1}}\,dx=\left[2\sqrt{x+1}\right]_1^2=2\sqrt{3}-2\sqrt{2}.$$

2) $f(x)=\dfrac{1}{(x+1)^2}$; $S_n=n\left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{1}{(n+1)^2}+\dfrac{1}{(n+2)^2}+\dots+\dfrac{1}{(2n-1)^2}\right).$

$$=n\left[\frac{1}{n^2}+\frac{1}{\left(n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)^2}+\dots+\frac{1}{\left(n\left(2-\frac{1}{n}\right)\right)^2}\right]$$

$$=n\times\frac{1}{n^2}\left[1+\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}+\dots+\frac{1}{\left(1+\frac{n-1}{n}\right)^2}\right].$$

$$= \frac{1-0}{n}\left[f(0) + f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + \dots + f\left(\frac{n-1}{n}\right)\right].$$

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \int_0^1 \frac{1}{(x+1)^2}\,dx = \left[\frac{-1}{x+1}\right]_0^1 = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}.$$

3) $f(x) = \cos^2 x$; $S_n = \frac{\pi}{n}\left(1 + \cos^2\frac{\pi}{n} + \cos^2\frac{2\pi}{n} + \dots + \cos^2\frac{(n-1)\pi}{n}\right)$.

$a = 0$ $\quad b = \pi$, $S_n = \frac{\pi}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \int_0^{\pi} \cos^2 x\,dx = \int_0^{\pi} \frac{1+\cos 2x}{2}\,dx$$

$$= \left[\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin 2x\right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}.$$

Si $C_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\left(\frac{b-a}{n}\right)\right)$

Alors $\lim_{n\to+\infty} C_n = \int_a^b f(x)\,dx.$

Aminetou Sidi Med Abdy.
Aïchetou Bouhamadi
Mbarka Med Lemin Zamel.
Faitma cherif Ahmed

Exercice 14

Pour tout entier naturel $n \geq 2$ et pour $k \leq n$ on pose: $I_{k;n} = \int_0^1 C_n^k x^k (1-x)^{n-k}\,dx$

1) Montrer que l'intégrale $I_{k;n}$ existe pour tout n.

2) En utilisant une intégration par parties trouver une relation entre $I_{k;n}$ et $I_{k+1;n}$. En déduire $I_{k;n}$ en fonction de k et n.

Exercice Resolu (14):

La fonction :

$(x \to C_n^k x^k (1-x)^{n-k})$

est continue sur $[0,1]$

pour tout k et $n \in \mathbb{N}$

tels que $0 \leq k < n$.

$n \geq 2$. car un polynôme (en developpant) Alors l'integrale $I_{k;n}$ existe pour tout n et k.

) En utilisant une I.P.P on pose :

$$\begin{cases} u'(x) = C_n^k x^k \\ v(x) = (1-x)^{n-k} \end{cases} \quad \text{Alors}$$

$$\begin{cases} u(x) = \dfrac{C_n^k}{k+1} x^{k+1} \\ v'(x) = -(n-k)(1-x)^{n-k} \end{cases}$$

$$I_{k;n} = \left[\frac{C_n^k}{k+1} x^{k+1}(1-x)^{n-k}\right] - \int_0^1 -\frac{(n-k)}{k+1} C_n^k x^{k+1}(1-x)^{n-k}\,dx.$$

$$I_{k;n} = 0 + \int_0^1 \frac{n-k}{k+1} C_n^k x^{k+1} (1-x)^{n-(k+1)}\,dx.$$

On a :

$$C_n^{k+1} = \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} = \frac{n! \times (n-k)}{(k+1)k!(n-k)(n-k-1)!} = \frac{n-k}{k+1} \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$C_n^k = \frac{n-k}{k+1} \cdot C_n^k.$$

Alors, En remplaçant :

$$I_{k;n} = \int_0^1 C_n^{k+1} x^{k+1}(1-x)^{n-(k+1)}\,dx.$$

$$\boxed{I_{k,n} = I_{k+1,n}}.$$

On en déduit que la suite $(I_{k,n})$ est consate par rapport de k.

Sad : $I_{k,n} = I_{0,n} = I_{n,n}$.

(Indépendante de k)

$I_{n,n} = \int_0^1 C_n^n x^n (1-x)^0 \, dx$

$I_{n,n} = \int_0^1 x^n \, dx$.

$= \left[\frac{1}{n+1} x^{n+1} \right]_0^1$.

$I_{n,n} = \frac{1}{n+1}$.

Alors, $I_{k,n} = \frac{1}{n+1}$.

pour tout $k \leq n$.

http://maurimath.net/Espaceeleves.php

Aminetou Sidi Med Abdy.
Vichetou Bouhamadi
Mbarka Med lemin Zamel.

Faitma cherif Ahmed

Exercice 12

Soit f une fonction continue sur un intervalle ouvert I. Soient a et b des réels dans I.

Prouver que: $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-x)dx$.

2) On pose $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 x dx}{\cos^3 x + \sin^3 x}$; $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 x dx}{\cos^3 x + \sin^3 x}$.

Montrer que I=J. Calculer I+J. En déduire I et J.

3) Calculer $K = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} (\sqrt{\cos x} - \sqrt{\sin x})dx$.

Exercice Résolu: 12.

on pose $t = a+b-x$

si $x = a \Rightarrow t = a+b-a = b$

$x = b \Rightarrow t = a$.

$dt = -dx \Rightarrow \int_a^b f(a+b-x)dx$

$= \int_b^a f(t)(-dt) = -\int_b^a f(t)dt$

$= \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(x)dx$.

$\Longrightarrow$

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-x)dx}$$

) $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 x}{\cos^3 x + \sin^3 x} dx$.

on pose :

$f(x) = \frac{\cos^3 x}{\cos^3 x + \sin^3 x}$,

$x \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

f est continue sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, car quotient de deux fonctions continues, on prend:

$a = 0$ $b = \frac{\pi}{2}$ donc $a+b-x = \frac{\pi}{2} - x$

$f(a+b-x) = f(\frac{\pi}{2} - x)$.

$$\frac{\cos^3(\frac{\pi}{2} - x)}{\cos^3(\frac{\pi}{2} - x) + \sin^3(\frac{\pi}{2} - x)} = \frac{\sin^3 x}{\sin^3 x + \cos^3 x}$$

D'après 1:

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\frac{\pi}{2} - x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$.

$\Longrightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 x}{\sin^3 x + \cos^3 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 x}{\cos^3 x + \sin^3 x} dx$

$$\boxed{J = I}.$$

On a :

$$I+J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^3 x+\sin^3 x}{\cos^3 x+\sin^3 x}\,dx.$$

$$I+J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx=[x]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}$$

$$I+J=\frac{\pi}{2}.$$

$$\begin{cases} I=J \\ I+J=\frac{\pi}{2}\end{cases}\Rightarrow I=J=\frac{\pi}{4}.$$

3) On pose :

$$f(x)=\sqrt{\cos x}-\sqrt{\sin x}.$$

$a=\frac{\pi}{6}$, $b=\frac{\pi}{3}$.

f est continue sur $[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}]$.

on a : $f(a+b-x)=f(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}-x)$

$$=f(\frac{\pi}{6}-x)=\sqrt{\cos(\frac{\pi}{2}-x)}-\sqrt{\sin(\frac{\pi}{2}-x)}=\sqrt{\sin x}-\sqrt{\cos x}$$

$$=-f(x).$$

D'après (1) :

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}f(x)\,dx=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}f(\frac{\pi}{2}-x)\,dx.$$

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}f(x)\,dx=-\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}f(x)\,dx$$

$$K=-K\Rightarrow\boxed{K=0}$$

http://maurimath.net/Espaceeleves.php

barka Med Lemin Zamel
ichetou Ahmed Bouhamadi
Iminetou SiDi Med Abdy
Faitma cheirif Ahmed

Exercice 10

En utilisant le changement de variable, calculer les intégrales suivantes:

$I_1=\int_1^2 \frac{dx}{(4x+5)^5}$; $t=4x+5$ $\qquad$ $I_2=\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}$; $x=\tan t$

$I_3=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{4dx}{1+\cos x}$; $t=\tan\frac{x}{2}$ $\qquad$ $I_4=\int_2^3 \frac{x^3dx}{\sqrt{x-1}}$; $t=x-1$

$I_5=\int_0^2 \frac{\sqrt{x+1}}{x^2+3x+2}dx$; $t=\sqrt{1+x}$ puis $t=\tan u$.

Solution:

$I_1=\int_1^2 \frac{dx}{(4x+5)^5}$;

$t=4x+5$

$\begin{cases} x=1 \Rightarrow t=5 \\ x=2 \Rightarrow t=13 \end{cases}$

$dt=4dx \Rightarrow$

$dx=\frac{1}{4}dt \Rightarrow I_1=\int_9^{13} \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{t^5}dt$

$I_1=\frac{1}{16}(13^{-4}-9^{-4})$.

: $I_2=\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}$

$x=\tan t$

$\begin{cases} x=1 \Rightarrow \tan t=1 \\ \Rightarrow t=\frac{\pi}{4} \\ x=\sqrt{3} \Rightarrow t=\frac{\pi}{3} \end{cases}$

$dx=(1+\tan^2 t)dt$

$dx=(1+x^2)dt$

$I_2=\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{(1+x^2)}{1+x^2}dt$

$I_2=\int_{\pi/4}^{\pi/3} dt \Rightarrow I_2=[t]_{\pi/3}^{\pi/4}$

$I_2=\frac{\pi}{12}$.

* $I_3=\int_0^{\pi/2} \frac{4}{1+\cos x}dx$; $t=\tan\frac{x}{2}$

$x=0 \Rightarrow t=0$

$x=\frac{\pi}{2} \Rightarrow t=1$

$dt=\frac{1}{2}(1+\tan^2\frac{x}{2})dx$.

$dt=\frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}}dx$.

$dx=2\cos^2\frac{x}{2}\,dt$

On sait que : $1+\cos x=2\cos^2\frac{x}{2}$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.

Alors, $I_3=\int_0^1 \frac{4\times 2\cos^2\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}}dx$.

$I_3=\int_0^1 4\,dt$.

$I_3=[4t]_0^1 \Rightarrow$

$I_3=4$.

* $I_4 = \int_2^{3} \frac{x^3\,dx}{\sqrt{x-1}}$

$t = x-1$

$\begin{cases} x=2 \Rightarrow t=1 \\ x=3 \Rightarrow t=2 \end{cases}$

$dt = dx$

$t = x-1 \Rightarrow x = t+1$

$I_4 = \int_1^2 \frac{(t+1)^3}{\sqrt{t}}\,dt$

$I_4 = \int_1^2 \frac{(t^3+3t^2+3t+1)}{t^{1/2}}\,dt$

$I_4 = \int_1^2 (t^{5/2}+3t^{3/2}+3t^{1/2}+t^{-1/2})\,dt$

$I_4 = \sqrt{2}\left(\frac{16}{17}+\frac{24}{5}+6\right) -$
$\left(\frac{2}{7}+\frac{6}{5}+4\right).$

* $I_5 = \int_0^2 \frac{\sqrt{x+1}}{x^2+3x+2}\,dx.$

$t = \sqrt{x+1}$

$\begin{cases} x=0 \Rightarrow t=1 \\ x=2 \Rightarrow t=\sqrt{3}. \end{cases}$

$dt = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}\,dx$

$= \frac{1}{2t}\,dx \Rightarrow dx = 2t\,dt$

on sait que:

$x^2+3x+2 = (x+1)(x+2)$
$= t^2(t^2+1)$

Alors: $I_5 = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{t\cdot 2t\,dt}{t^2+1}$

$t = \tan x$

$\begin{cases} t=1 \Rightarrow x=\frac{\pi}{4} \\ t=\sqrt{3} \Rightarrow x=\frac{\pi}{3} \end{cases}$

$dt = (1+\tan^2 x)\,dx$

$I_5 = 2\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{(1+\tan^2 x)}{1+\tan^2 x}\,dx$

$I_5 = 2\int_{\pi/4}^{\pi/3} dx.$

$I_5 = [2x]_{\pi/4}^{\pi/3}$

$I_5 = \frac{\pi}{6}.$

http://maurimath.net/Espaceeleves.php

Mbarka Med Lemin Zamet
Aichetou Ahmed Bouhamadi
Aminetou SiDi Med Abdy
Faitma cherif Ahmed

Exercice 8

On pose : $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin^2 x\,dx$; $J=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos^2 x\,dx$;

1) Calculer I+J
2) En utilisant une intégration par parties, calculer I-J ,
3) En déduire I et J.

Solution:

1) $I+J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x\sin^2 x + x\cos^2 x)dx$

$I+J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x(\sin^2 x + \cos^2 x)\,dx$.

$I+J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\,dx$

$I+J = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^{\pi/2}$

$I+J = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - 0^2\right)$.

$\boxed{I+J = \frac{\pi^2}{8}}$

2) on a $I-J = \int_0^{\pi/2} (x\sin^2 x - \cos^2 x)\,dx$.

$I-J = \int_0^{\pi/2} x(\sin^2 x - \cos^2 x)\,dx$.

$I-J = \int_0^{\pi/2} (-x\cos 2x)\,dx$.

On utilise une intégration par parties :

on pose : $\begin{cases} u(x) = -x \\ v'(x) = \cos 2x \end{cases}$

Alors : $\begin{cases} u'(x) = -1 \\ v(x) = \frac{1}{2}\sin 2x \end{cases}$.

Comme $\int uv' = uv - \int u'v$

$I-J = \left[-x \times \frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \left(-\frac{1}{2}\sin 2x\right)dx$.

$I-J = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} (\sin 2x)\,dx$

$I-J = \left[-\frac{1}{4}\cos 2x\right]_0^{\pi/2}$

$I-J = -\frac{1}{4}\cos\pi + \frac{1}{4}\cos 0$

$\boxed{I-J = \frac{1}{2}}$. On résout le

Système $\begin{cases} I+J = \frac{\pi^2}{8} \\ I-J = \frac{1}{2} \end{cases}$

Par addition : $2I = \frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{2} \Rightarrow$

$I = \frac{\pi^2+8}{16}$.

Par soustraction : $2J = \frac{\pi^2}{8} - \frac{1}{2}$

$\Rightarrow J = \frac{\pi^2-8}{16}$.

http://maurimath.net/Espaceeleves.php

Mbarka Med Lemun Zamel
Aicheton Ahmed Benhamady
Amineton Sidi Med Abdy
Faitma cherif Ahmed

Exercice 6

Pour tout entier naturel n on pose: $U_n = \int_0^1 \frac{t^n dt}{1+t^2}$

1) Prouver que l'écriture précédente définit bien une suite numérique (U_n).

2) Montrer que la suite (U_n) est décroissante et positive. En déduire qu'elle est convergente.

3) Montrer que: $\lim_{n\to\infty} U_n = 0$.

Solution:

1/ $U_n = \int_0^1 \frac{t^x}{1+t^2} dt$

comme la fonction $t \mapsto \frac{t^n}{1+t^2}$ est une fonction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. elle est continue sur $\mathbb{R}$ et donc sur $[0,1]$ d'où l'intégrale U_n existe et l'écriture $\int_0^1 \frac{t^x}{1+t^2} dt$ définit bien une suite numérique.

2/ $U_n = \int_0^1 \frac{t^x}{1+t^2} dt$

et $U_{n+1} = \int_0^1 \frac{t^{x+1}}{1+t^2} dt$

on a: $0 \leq t \leq 1$ et un multiplie par $\frac{t^x}{1+t^2}$ qui est ≥ 0 sur $[0,1]$

on obtient $0 \leq \frac{t^{n+1}}{1+t^2} \leq \frac{t^n}{1+t^2}$

D'où $0 \leq \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t^2} dt \leq \int_0^1 \frac{t^x}{1+t^2} dt$

Donc $\forall x \in \mathbb{N}$ $0 \leq U_{n+1}$. D'où: U_n est $\searrow$ et positive et comme elle est $\searrow$ et minorée (par 0) elle est donc convergente.

3/ $U_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2} dt$ $\quad 0 \leq t \leq 1 \Rightarrow 0 \leq t^2 \leq 1 \Rightarrow$

$0 < 1 \leq 1+t^2 \leq 2$

$\Rightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{1}{1+t^2} \leq 1$

et en multipliant par t^n (qui est ≥ 0 sur $[0,1]$), on obtient $\frac{1}{2} t^n \leq \frac{t^n}{1+t^2} \leq t^n$

Donc: $\frac{1}{2} \int_0^1 t^n dt \leq \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2} \leq \int_0^1 t^n dt$

D'où: $\frac{1}{2} \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 \leq U_n \leq \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} \right]_0^1$

donc $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+1} - 0\right) \leq U_n \leq \frac{1}{n+1} - 0$

D'où: $\forall x \in \mathbb{N}$ $\frac{1}{2(x+1)} \leq U_n \leq \frac{1}{x+1}$

or: $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2(x+1)} = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x+1} = 0$

d'où d'après le T.G $\lim_{x\to+\infty} U_n = 0$

Mbarka Med lemin Zamel
Aicheton Ahmed Bouhamady
Amineton Sidi Med Abdy
Faitma cherif Ahmed

Exercice 4

Soit la fonction f définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par: $f(x) = x + \sqrt{x^2+1}$.

On pose : $I = \int_0^1 \frac{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^2}{\sqrt{x^2+1}}dx$; $J = \int_0^1 \frac{1}{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\sqrt{x^2+1}}dx$.

Calculer f'(x); en déduire I et J.

Solution:

1/ on a pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = 1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} \quad \text{soit } f'(x) = \frac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}$$

l'intégrale $I = \int_0^1 \frac{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^2}{\sqrt{x^2+1}}dx$

peut être sous la forme

$$I = \int_0^1 \frac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}} \cdot \left(x+\sqrt{x^2+1}\right)dx$$

D'où : $I = \left[\frac{1}{2}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^2\right]_0^1$

$I = \frac{1}{2}(1+\sqrt{2})^2 - \frac{1}{2}(2)^2$ En Fin :

$$I = \frac{-1+2\sqrt{2}}{2}$$

L'intégrale $J = \int_0^1 \frac{1}{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\sqrt{x^2+1}}dx$

peut être sous la forme :

$$J = \int_0^1 \frac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}} \times \frac{1}{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^2}dx$$

d'où : $J = \left[\frac{-1}{x+\sqrt{x^2+1}}\right]_0^1 = \frac{-1}{1+\sqrt{2}} + 1$

En Fin $J = \frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$.

Mbarka Med temin Samer
Aicheton Ahmed Bouhamady
Amineton sidi Med Abdy

Faitma cherif Ahmed

Exercice 2

Soit la fonction f définie par: $f(x)=\dfrac{x^3+3x^2+3x-3}{(x+1)^2}$

1) Déterminer les réels a ;b ;c tels que : $\forall x\in D_f, f(x)=ax+b+\dfrac{c}{(x+1)^2}$

2) En déduire une primitive de f.

Solution:

1/ $ax+b+\dfrac{c}{(x+1)^2}=f(x) \quad ,\forall x\in D_f$

$\Leftrightarrow \dfrac{(x+1)^2(ax+b)+c}{(x+1)^2}=f(x), \forall x\in D_f$

$\Rightarrow \dfrac{(x^2+2x+1)(ax+b)+c}{(x+1)^2}=f(x), \forall x\in D_f$

$\Rightarrow \dfrac{ax^3+bx^2+2ax^2+2bx+ax+b+c}{(x+1)^2}$

$=f(x), \forall x\in D_f$.

$\Rightarrow \dfrac{ax^3+(b+2a)x^2+(2b+a)x+b+c}{(x+1)^2}$

$=\dfrac{ax^3+(b+2a)x^2+(2b+a)x+b+c}{(x+1)^2}$

$=\dfrac{x^3+3x^2+3x-3}{(x+1)^2} \quad \forall, x\in D_f$

par identification $\Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b+2a=3 \\ 2b+a=3 \\ b+c=-3 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=3-2\times 1=1 \\ 2\times 1+1=3 \\ c=-3-1=-4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=1 \\ c=-4 \end{cases}$

$\forall x\in D_f$, $f(x)=x+1-\dfrac{4}{(x+1)^2}$

2/ $\forall x\in D_f$, $f(x)=x+1-\dfrac{4}{(x+1)^2}$

Donc $F(x)=\dfrac{1}{2}x^2+x+\dfrac{4}{x+1}+c$

est une primitive de f sur : $]-\infty,-1[$ et $]-1,+\infty[$

Exercice 1

Soit f la fonction de variable réelle définie par : $f(x)=\dfrac{x+x^2+\dots+x^{2015}-2015}{x-1}$

Calculer $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^k-1}{x-1}$, $(k\in IN^*)$ en déduire $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$

Solution : Exo 1 Page 18 chapitre 5 Généralités sur les fonctions :

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^k-1}{x-1}=\dfrac{1^k-1}{1-1}=\dfrac{0}{0}$: FI.

On pose $g(x)=x^k \Rightarrow \begin{cases} g(1)=1 \\ g'(x)=k.x^{k-1} \\ g'(1)=k \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to 1}=\dfrac{x^k-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{g(x)-g(1)}{x-1}=g'(1)=k$

Autre methode. * Somme de terme de S.A

On a : $1+x+x^2+\dots+x^n$ $=\dfrac{\text{Nbr de terme}}{2}(1^{\text{ere}}\text{ terme}+D^{\text{ere}}\text{ terme})$

$=1\times\dfrac{1-x^{n+1}}{1-x}=\dfrac{x^{n+1}-1}{x-1}$

$\Rightarrow 1+x+\dots+x^{k-1}=\dfrac{x^{k}-1}{x-1}$

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{k}-1}{x-1}=\lim(1+x+x^2+\dots+x^{k-1})$.

$1+1+\dots+1=k$

$\lim\limits_{x\to 1}f(x)=\lim\dfrac{x+x^2+\dots+x^{2015}-2015}{x-1}$

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)+(x^2-1)+\dots+(x^{2015}-1)}{x-1}$

$\lim\limits_{x\to 1}\left[\dfrac{x^1-1}{x-1}+\dfrac{x^2-1}{x-1}+\dots+\dfrac{x^{2015}-1}{x-1}\right]$

$:(1+2+\dots+2015)=\dfrac{2015}{2}(1+2015)=2015\times 1008$

Aichetou Ahmed Bouhoub
Mbarka Medlemin Zamel
Aminetou Sidi Med Abdel
Faitma cherif Ahmed

Exercice 2

Soit f la fonction de variable réelle définie par : $f(x)=\frac{(1+x)^{2015}-1}{x}$.

Démontrer que f admet un prolongement par continuité g au point $x_0=0$.
Préciser g(x).

Solution Exo 2 Page 19 Généralités sur les fonctions.

$f(x)=\frac{(1+x)^{2015}-1}{x}$. $0 \notin D_f$.

$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{2015}-1}{x}$
$=\frac{(0+1)^{2015}-1}{0}=0/0$

Lever de l'indermination:

Soit $U(x)=(1+x)^{2015}$

$\Rightarrow \begin{cases} U(0)=1 \\ U'(x)=2015(1+x)^{2014} \\ U'(0)=2015 \end{cases}$

$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{2015}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{U(x)-U(0)}{x-0}$
$=U'(0)=2015\in\mathbb{R}$.

Donc f admet un prolongement par continuité en 0.

a prolongement est :

$\begin{cases} g(x)=f(x) : \forall x\in D_f \\ g(0)=2015. \end{cases}$

Theoreme des valeur intermediaires.

Si f est continue que I alors $\forall m\in f(I)$ d'equation $f(x)=m$ admet une unique solution.

Aichetou Ahmed Bouhamadi

Aminetou SiDi Med Abdy.

Mbarka Med Lemin Zamel.

Faitma cherif Ahmed

Exercice 3

Soit f la fonction définie par : $f(x)=x^4-\frac{4}{x}$.

Démontrer que l'équation $f(x)=\sin x$ admet une solution dans l'intervalle [1,2].

Solution ; Exo 3 Page 20 Generalité sur les fonctions.

$f(x)=x^4-\frac{4}{x}$

Montrons que l'équation $f(x)=\sin x$ admet une solution sur $I=[1,2]$

$\Rightarrow$ Montrons que : $f(x)-\sin x=0$ admet une solution sur I.

Soit : $h(x)=f(x)-\sin(x)$

$h(x)=x^4-\frac{4}{x}-\sin x$

h est continue sur $I=[1,2]$

$h(1)=1^4-\frac{4}{1}-\sin 1=-3-\sin 1<0$

$h(2)=2^4-\frac{4}{x}-\sin 2=14-\sin 2>0$

Comme :

$h(1)\times h(2)<0$

$\Rightarrow 0\in h(I)$

D'après T.V.I

$\exists x_0\in I$ -

$h(x_0)=0$

$f(x_0)-\sin x_0=0$

$f(x_0)=\sin x_0$.

Aïchetou Ahmed Bouhamadi
Aminetou Sidi Med Abdy.
Mbarka Med lemin Zamel
Faitma cherif Ahmed

Exercice 5

Soit f la fonction de variable réelle définie sur $[0,\pi]$ par : $f(x)=\cos x$.

1) Démontrer que f réalise une bijection de $[0,\pi]$ sur un intervalle J que l'on précisera.

2) Construire dans le même repère orthonormé, les courbes représentatives de f et de f^{-1}.

3) Montrer que f^{-1} est dérivable sur $]-1,1[$ et calculer sa dérivée.

4) Démontrer que $f^{-1}(x)+f^{-1}(-x)=\pi$ pour tout x de J. Interpréter graphiquement

Solution : Exo 5 Page 21

1) $f(x)=\cos x$. $x\in[0,\pi]$.

f est defini, continue et derivable sur $[0,\pi]$.

$\lim_{x\to 0^+} f(x)=f(0)=\cos(0)=1$

$\lim_{x\to\pi^-} f(x)=f(\pi)=\cos(\pi)=-1$

$f'(x)=-\sin x$.

$\sin x=0 \Rightarrow x=k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

pour $k=0$: $x=0\ (\in[0,\pi])$

pour $k=1$: $x=\pi\ (\in[0,\pi])$.

pour $k=2$: $x=2\pi\ (>\pi)$.

pour $k=-1$: $x=-\pi\ (<0)$

T.V. f :

x	0		π
$f'(x)$	0	$-$	
$f(x)$	1	$\searrow$	-1

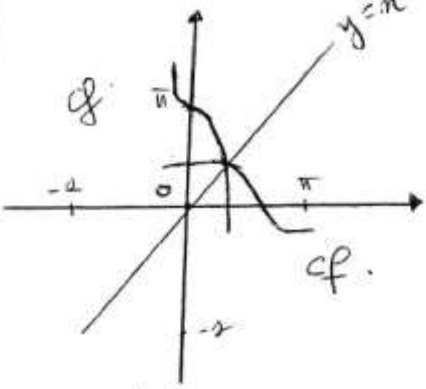
comme f est continue et stictement monotone sur l'intervalle $[0,\pi]$ elle realise une bijection de $[0,\pi]$ sur l'intervalle $J=f([0,\pi])=[-1,1]$

2) $C_f \cap (yy')$: $(0,1)$

$C_f\cap(xx')$: $f(x)=0$

$\Rightarrow \begin{cases}\cos x=0 \text{ et}\\ x\in[0,\pi]\end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}$

Donc $(\frac{\pi}{2},0)$



comme f est derivable et comme sa derivee ne s'annule pas sur l'intervalle ouvert $]0,\pi[\,)=]-1,1[$

et $\forall x\in]-1,1[$, $(f^{-1})'(x)=\frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$

or : $f'(y)=-\sin y=-\sqrt{1-\cos^2 y}=-\sqrt{1-(f(x))^2}$.

D'ou : $(f^{-1})'(x)=\frac{1}{-\sqrt{1-[f(f^{-1}(x))]^2}}=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Donc : $\forall x\in]-1,1[$.

$(f^{-1})'(x)=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$.

4) On pose $\forall x\in(-1,1)$

$h(x)=f^{-1}(x)+f^{-1}(-x)$.

Alors : h est derivable sur $]-1,1[$ et $\forall x\in]-1,1[$, $h'(x)=(f^{-1})'(x)$

$(f^{-1})'(x)=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}-\left(\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\right)$

$=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=$

Donc $\forall x\in J$.

Aichetou Ahmed Bouhan

Mbarka Med lemin Zein

Aminetou Aboly.

Faitma cherif Ahmed

Exercice 7

Soit f et g les fonctions définies par : $f(x) = x^2 - 2x + a$, $g(x) = -x^2$

Déterminer le réel a pour que les courbes représentatives de f et de g, dans le même repère orthonormé, aient une tangente commune en un point.

Solution : Exo 7 Page 22 Généralités sur les fonction

$f(x) = x^2 - 2x + a$ et $g(x) = -x^2$

En un point d'abscisse x_0

Une equation de la tangente à C_f est : $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

et une equation de la tangente à C_g est : $y = g'(x_0)(x - x_0) + g(x_0)$ on doit donc avoir

$$\begin{cases} f(x_0) = g(x_0) \\ \text{et} \\ f'(x_0) = g'(x_0). \end{cases}$$

Calculons $f'(x)$ et $g'(x)$

$f'(x) = 2x - 2$ et $g'(x) = -2x$

D'où on doit avoir

$$\begin{cases} x^2 - 2x_0 + a = -x_0^2 \ (1) \\ \text{et } 2x_0 - 2 = -2x_0 \ (2) \end{cases}$$

De (2) on a : $4x_0 = 2 \Rightarrow x_0 = \frac{1}{2}$

et en remplaçant dans (1) on obtient :

$\frac{1}{4} - 1 + a = -\frac{1}{4} \Rightarrow$

$a = 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{4}$.

$a = 1 - \frac{1}{2} \Rightarrow a = \frac{1}{2}$.

Aichetou Ahmed Bouhamadi
Mbarka Med Lemin Zamel.
Aminetou SiDi Med Abdy.
Faitma cherif Ahmed